Clase 16

Capacitancia y Dieléctricos

Ley de Gauss con dieléctricos

Como la carga ligada y la carga libre no son independientes podemos usando la expresión de arriba escribir la ley de Gauss en términos únicamente de la carga libre. En efecto escogiendo una superficie gaussiana con una cara dentro del conductor tenemos que

$$ES_1 = \int_S \vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{dS}} = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} S_1 = \frac{\sigma}{K\epsilon_0} S_1$$

donde S_1 es el área de la porción de la superficie perpendicular al campo. Si llamamos Q a la carga libre podemos escribir la ley de Gauss en presencia de dieléctricos en las formas alternativas

$$\int_S K\vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{dS}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \int_S \vec{\mathbf{E}}.\vec{\mathbf{dS}} = \frac{Q}{\epsilon}$$

El vector de Polarización

Para realizar una descripción microscópica local del fenómeno de polarización conviene definir el vector de polarización $\vec{\mathbf{P}}$ como el momento dipolar dieléctrico inducido por unidad de volumen. Sea p el valor promedio del módulo del momento dipolar inducido en las moléculas del material dieléctrico y n el número promedio de moléculas polarizadas por unidad de volumen. Si tomamos l y q como los valores promedios de la carga separada y de la separación de las cargas tendremos $p = ql$. El módulo del vector de polarización es $P = np = nql$. Estas cantidades pueden depender de la posición. En el caso del capacitor de placas paralelas el vector de polarización toman el mismo valor sobre una paralela a las placas. Si consideramos una franja de ancho l adyacente a una de las placas la carga de polarización es la carga neta que se encuentra en esa placa

$$Q_i = (nq)(Al) \quad \rightarrow \quad \sigma_i = nql$$

Hemos encontrado entonces que $P = \sigma_i$. En el caso mas general en que la superficie no es perpendicular al vector de polarización esto se escribe localmente como

$$\sigma_i = \vec{\mathbf{P}}.\vec{\mathbf{n}}$$

donde $\vec{\mathbf{n}}$ es el vector perpendicular a la superficie.

Susceptibilidad eléctrica

En los materiales dieléctricos cuando el campo eléctrico no es demasiado intenso, podemos describir la polarización como un efecto lineal en el campo. Introducimos la constante susceptibilidad eléctrica χ del material por la relación,

$$\vec{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \chi \vec{\mathbf{E}}.$$

Esta es una relación fenomenológica aplicable al conjunto de materiales con respuesta lineal en situaciones con campos eléctricos moderados. Existen por un lado materiales que no tienen una respuesta isotrópica a la presencia del campo mientras que por el otro para campos suficientemente intensos aparecen términos no lineales para la mayoría de los materiales Vemos como podemos encontrar la relación entre la constante dieléctrica K y la constante de susceptibilidad dieléctrica χ explotando la expresión de la carga inducida σ_i en términos del vector de polarización en un capacitor de placas paralelas.Tenemos las igualdades,

$$\sigma_i = P = \sigma(1 - \frac{1}{K}) = \epsilon_0 \chi E = \chi \frac{\sigma}{K}$$

De donde

$$K = 1 + \chi$$

<u>El vector desplazamiento</u>

Suele introducirse también el vector desplazamiento $\vec{\mathbf{D}}$ según la relación

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon \vec{\mathbf{E}} = \epsilon_0 K \vec{\mathbf{E}}.$$

En términos de $\vec{\mathbf{D}}$ la ley de Gauss con materiales dieléctricos queda,

$$\int_S \vec{\mathbf{D}}.\mathbf{d}\vec{\mathbf{S}} = q.$$

donde q es la carga libre encerrada por la superficie S.

Ejemplo 48: Capacitor con dos bloques de dieléctricos.

Consideremos ahora un capacitor de placas paralelas con carga Q, área A y distancia entre las placas d, relleno por dos bloques de materiales dieléctricos distintos con constantes K_1 y K_2 colocados uno al lado del otro. Queremos calcular el campo eléctrico y la carga inducida en las caras en cada dieléctrico y la capacitancia total.

Seguimos trabajando en la aproximación en que podemos considerar que el campo eléctrico es perpendicular a las placas y constante en cada dieléctrico. La densidad de carga sobre las placas conductoras no es uniforme sino que distribuye la carga en dos porciones $Q = Q_1 + Q_2$ con densidades constantes σ_1 y σ_2 constantes en la superficies en contacto con cada dieléctrico (las cuales tiene area $A/2$. Las cargas inducidas tienen densidades superficiales

$$\sigma_{i1} = \frac{\sigma_1(K_1 - 1)}{K_1} \quad , \quad \sigma_{i2} = \frac{\sigma_2(K_2 - 1)}{K_2}.$$

Los campos eléctricos valen

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{K_1\epsilon_0} \quad , \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{K_2\epsilon_0}, \quad \sigma = \frac{Q}{A} \ .$$

Para calcular Q_1 y Q_2 notamos que la diferencia de potencial calculada por un camino que pase por el dieléctrico 1 o por un camino que pase por el dieléctrico 2 debe dar lo mismo,

$$\Delta V = dE_1 = dE_2 \to \frac{d\sigma_1}{K_1\epsilon_0} = \frac{d\sigma_2}{K_2\epsilon_0}, \quad \sigma = \frac{Q}{A} \ .$$

de donde

$$Q_1 = \frac{K_1}{K_2}Q_2 \ \ , Q_2 = Q - Q_1 \to Q_1 = \frac{K_1}{K_1 + K_2}Q \ \ , \ \ Q_2 = \frac{K_2}{K_1 + K_2}Q$$

La diferencia de potencial entre las placas y la capacitancia son

$$\Delta V = dE_1 = \frac{d\sigma_1}{K_1\epsilon_0} = \frac{2Qd}{(K_1 + K_2)A\epsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{\delta V} = \frac{d\sigma_1}{K_1\epsilon_0} = \frac{(K_1 + K_2)A\epsilon_0}{2d}$$

Esta capacitancia corresponde a la capacitancia equivalente en paralelo de dos capacitores de area $A/2$ y distancia d entre las placas rellenados con dieléctricos de constantes K_1 y K_2.

Ejemplo 49: Capacitor con dos capas de dieléctricos.

Consideremos un capacitor de placas paralelas con carga Q, área A y distancia entre las placas d, relleno por dos capas de materiales dieléctricos distintos con constantes K_1 y K_2. Queremos calcular el campo eléctrico y la carga inducida en las caras en cada dieléctrico y la capacitancia total.

Trabajamos en la aproximación en que despreciando los efectos de borde podemos considerar que el campo eléctrico es perpendicular a las placas y constante en cada dieléctrico. Usando la ley de Gauss con una superficie cilíndrica que tenga una cara dentro del conductor una dentro del material dieléctrico y la superficie cilíndrica paralela al campo encontramos que:

$$E_1 = \frac{\sigma}{K_1\epsilon_0} \quad , \quad E_2 = \frac{\sigma}{K_2\epsilon_0}, \quad \sigma = \frac{Q}{A} \ .$$

Las densidades cargas inducidas en las caras de los dieléctricos son respectivamente

$$\sigma_1 = \frac{\sigma(K_1 - 1)}{K_1} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{\sigma(K_2 - 1)}{K_2}.$$

La diferencia de potencial entre las placas y la capacitancia son

$$\Delta V = \frac{d}{2}(E_1 + E_2) = \frac{d\sigma}{2\epsilon_0}(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2})$$

$$\frac{1}{C} = \frac{\Delta V}{Q} = \frac{d\sigma}{2\epsilon_0 A}(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2})$$

Por inspección verificamos que esta capacitancia es igual a la capacitancia equivalente en serie de un capacitor con area A, separación $d/2$ relleno del dieléctrico de constante K_1 yotro de las mismas dimensiones relleno dl dieléctrico con la constante K_2.